SLMの知識構造化に関する研究

2025.03.22

吹谷和雄　MathDoc

要旨

□本研究では、LLM/LRMからSLM言語空間への知識意味表現を、統計的確率分布空間として数学的に再解釈する新たな枠組みを提案する。具体的には、知識ベクトルの分布をボルツマン分布やカノニカル分布により表現し、KLダイバージェンスや情報エントロピーそして測地線を用いて意味的距離を測定する。その後、リーマン幾何学的構造(情報幾何)を通じ、統計確率分布の変化を接空間上で記述し、さらに推論過程を確率微分方程式やトポロジー（ホモロジー、ホモトピー）に基づいてモデル化する。最後に、知識の特定条件や変換などでも変わらない性質や状態である不変性(対称性)を抽出する為に群論のガロア拡大L/Kという正規性と分散・拡張性を得て、知識の本質的な構造を解析する。

□本枠組みにより、知識の本質的な構造や意味的分類そして真偽性の指標となり、知識推論の精度向上及びコンパクト化や計算効率の改善が期待される。

キーワード：知識構造化、言語空間、統計確率分布、情報幾何、ホモロジー、ホモトピー、不変性

---

1. はじめに

□近年、生成AI/LLMなどの実用化に伴い、知識の表現および推論手法に対する関心が高まっている。従来の知識ベクトルの表現は、言語空間上における意味的情報を捕捉するが、その背後にある確率論的・幾何学的構造については十分に解明されていない。そこで、本研究では、言語空間から統計確率分布空間への変換を基礎とし、さらに接空間や推論空間への変換を通して、知識推論を数学的に厳密に記述する枠組みを提案する。

---

2. 理論的背景

2.1 言語空間とTokenベクトル

□言語空間は、Tokenをn次元の埋め込みベクトルとして表現して、それらのAffine変換で“知識”を生成して、知識間の周辺類似性による条件付き連鎖で推論を行っている。最近の強化学習RLやAIエージェントの連鎖推論も原理的には同じです。

□従来の手法では、意味的類似性が“距離や角度”により評価されるが、多次元意味概念空間は頻出性や固有値などで曲がった過疎空間になっているので、本研究ではこれを確率分布とトポロジーそしてガロア群の観点から再解釈する。

2.2 統計確率分布と情報理論

□従来のLLM/Tokenizing+Embeddingの単語ベクトルに基づきAffine変換された知識K(n)は、多くの擬直交性を持つ基底d次元(通常は数千〜数万)から成る[n×d]行列で表され、Transformer/Attention機構を通じて処理される。この表現では、単語同士の類似性は内積やコサイン類似度などのユークリッド的な距離・角度で評価される。しかし、意味概念空間は、“曲がった過疎空間”であるので、単語間や知

識間の意味的距離は、曲率を使って最短距離(測地線)を求めることになる。
□これらの問題に対し、統計確率分布と情報理論（KL ダイバージェンス、エントロピー）そして曲率によって、単語間の意味距離や情報のロス、獲得情報をより定量的に評価する枠組みが構築される。

・擬直交性基底の膨大なパラメータ数によって、わずかに重なり合う基底間の隙間に、予期せぬ知識表現が生じ、時には高度で制御不能な AI が生成されるという指摘がある。
「Johnson-Lindenstrauss の補題」
＜論文＞https://cs.stanford.edu/people/mmahoney/cs369m/Lectures/lecture1.pdf
＜動画解説＞Class 8, Video 1: Johnson-Lindenstrauss Lemma (youtube.com)
・また、ニューラルネットワーク・モデルは、微小な摂動によって分類や予測結果が変化することが知られている。(摂動(Perturbation)とは、微小な変化を与えること)

2.3 情報幾何と接空間

統計確率分布空間はリーマン幾何学の枠組みにおいて解析され、フィッシャー情報行列により、分布間の測地線が定義される。これにより、単語の意味変化を接空間上の曲率として捉えることが可能となる。
□これらの埋め込みベクトルを確率分布へ変換し、ボルツマン分布と KL ダイバージェンスそしてフィッシャー情報計量による測地線の確率論的な意味の距離測定や意味変化の予測を可能にしている。

2.4 確率分布による知識の再解釈

この枠組みにより、単語ベクトルの集合が単なる座標上の点ではなく、統計的な分布として解釈されるため、以下のような利点が得られます。

- **意味変化の滑らかな評価:** 温度パラメータの調整により、単語間の意味変化を滑らかに制御でき、言語モデル内での意味的シフトや連続性をより正確に捉えられます。
- **情報理論的指標による評価:** KL ダイバージェンスやエントロピーを用いることで、従来の内積ベースの評価よりも、情報のロスや新たな情報の獲得を定量的に評価することが可能となります。
- **統計的性質の利用:** 確率分布として定義することで、中心極限定理や大数の法則といった統計学の基本原理を応用し、言語空間のマクロな性質や安定性についても解析できるようになります。

□このように、統計確率分布と情報理論の枠組みは、従来の埋め込みベクトルによる表現を超えて、知識の意味構造をより深く、かつ定量的に把握するための強力なツールとして機能します。
これにより、推論アルゴリズムの精度向上や、知識表現のコンパクト化、さらには意味的距離の新たな定式化が実現されると期待されます。

---

3. 提案する変換理論

本研究の枠組みは、以下の 3 段階の変換に基づく。

3.1 言語空間から統計確率分布空間への変換

- **単語ベクトルの定義**

言語空間の各単語を、n 次元の埋め込みベクトル $w_i \in \mathbb{R}^n$ で表す。これを確率分布に変換するには、単語の発生確率 $P(w_i)$ を考える。確率分布 P(w)をボルツマン分布として定義：

$$P(w) = \frac{e^{-E(w)/T}}{Z}$$

ここで、

- E(w) はエネルギー関数（単語の類似性に基づくスコア）
- T は温度パラメータ（意味の拡散度を制御）
- Z は正規化定数（分配関数）　$Z = \sum_{w_i} e^{-E(w_i)/T}$

- **意味距離の測定**
  単語間の類似性を KL ダイバージェンス

$$D_{KL}\left(P_i \parallel P_j\right) = \sum_w P_i(w) log \frac{P_i(w)}{P_j(w)}$$

これにより、単語間の意味距離を確率論的に測定可能になり、評価される。

☐但し、KL ダイバージェンスは、非可換環なので距離の可換性を満たしていない。これは厳密には距離とは言えないので、類似度と捉えるべきであるが、逆にこれを利用して、各知識間の確率分布部分空間からの有向的な近傍知識として算出すると、連鎖推論が抽出可能になる。

☐無向性である相関関係は、従来の Attention 機構で抽出されて処理されているが、この相関関係を有効性の因果関係や連鎖推論などに変換するには、交絡 Confound による真偽性の吟味が必須になるので、従来のユークリッド空間では不可能でした。

- **意味的解釈:** KL ダイバージェンスは、ある分布 P から他の分布 Q に変換する際に「失われる情報量」を定量化します。したがって、2 つの単語の出現確率分布が類似しているほど、KL ダイバージェンスは小さくなり、意味的な距離が近いと解釈できます。

☐また、情報理論の観点からは、**情報エントロピー**も重要な役割を果たします。エントロピーは分布の不確実性を表し、

$$H(P) = -\sum_w P(w) log P(w)$$

と定義されます。エントロピーが高いほど、単語の意味が多様な解釈を許容することを意味し、エントロピーと KL ダイバージェンスの組み合わせにより、意味の曖昧さや明確さの度合いを定量的に評価できます。

☐知識空間の過疎性をエントロピーで求めることで、LLM が Hallucination を起こす確率を表し、その数学的背景には、固有値の Entangle な混合状態にあることを示唆している。

詳しくは、「LLM が Hallucination を起こす確率」（吹谷）https://www.ctag.co.jp を参照

3.2 統計確率分布空間から接空間への変換

確率分布 P(w) をリーマン幾何学の枠組みで解析し、接空間上の変化を記述する。

- **情報幾何による解析**
  統計確率分布空間をリーマン多様体とみなし、フィッシャー情報行列を用いて、各分布間の距離および意味変化を解析する。

$$g_{ij} = \mathbb{E}\left[\frac{\partial log P}{\partial \theta_i} \frac{\partial log P}{\partial \theta_j}\right]$$

が確率分布間の測地線を定める。

例えば、2 つの単語 w_i, w_j の距離はフィッシャー情報計量により、

$$d(w_i, w_j) = \int_\gamma \sqrt{g_{ij} d\theta^i d\theta^j}$$

のように測定可能になる。

- **曲がった空間上での最短距離測定法（測地線）**

＜従来手法＞

・ユークリッド空間上の距離計算　$d(p,q)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(q_i-p_i)^2}$

・コサイン類似度　$cos\theta=\frac{<w_i\cdot w_j>}{||w_i||\cdot||w_j||}$

・内積　$Transformer\cdot Attention=softmax\left(\frac{QK^T}{\sqrt{d}}\right)V$

□上式は、すべて“平坦な空間”上での距離計算法で、曲がった意味概念空間上の計算法ではない。言語空間内の疎な部分空間では、誤差が多くなるので、新提案を以下に示す。

＜提案手法＞

・曲面の最短距離：測地線＝（Euclid 距離×曲率）

・曲率≒||外積||　外積の例：$w_i\times w_j=\begin{bmatrix}w_i^1\\w_i^2\\w_i^3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}w_j^1\\w_j^2\\w_j^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}w_i^2w_j^3-w_j^2w_i^3\\-w_i^1w_j^3+w_j^1w_i^3\\w_i^1w_j^2-w_j^1w_i^2\end{bmatrix}$

□外積のノルムが曲率の近似になるので、これで疎な部分空間でも正確な距離が求まる。

- **確率過程による意味の変化**

意味変化を確率微分方程式で表すと、

$$dX_t=\mu(X_t)dt+\sigma(X_t)dW_t$$

の形になります。ここで、

・X_t：時刻 t における「意味」または「語の意味ベクトル」

・$\mu(X_t)$：確定的な（決定論的な）変化を表すドリフト項（意味のトレンド変化）

・$\sigma(X_t)$：変動の大きさを決める拡散係数（意味のランダムな変動の強さ）

・W_t：ウィーナー過程（ブラウン運動）で、言語の変化におけるランダムな揺らぎ

□この式は、意味が時間とともに**決定論的な変化** μ(Xt)dt を受けつつ、**ランダムな変動** σ(Xt)dWt によって拡散するモデルを示しています。（拡散モデル：DiffusionModel）

例えば、

・ドリフト項$\mu(X_t)$：言葉の意味が文化や社会の変化に従ってゆっくりシフトする傾向

・拡散項$\sigma(X_t)dW_t$：言葉の意味が予測不可能なランダムな影響を受けて揺れ動く現象

- **確率分布の時間変化**

一方で、確率分布 Pt(w)の時間発展を表す式を

$$dP_t(w)=-\nabla E(w)P_t(w)dt+\sigma dW_t$$

と表せます。これを詳しく見ると、

- Pt(w) : 時刻 t における「語 w の意味の確率分布」
- ∇E(w) : 「意味のエネルギー関数」の勾配（エネルギーの低い方向へ確率分布が移動する）
- −∇E(w)Pt(w)dt : 確率密度が「意味のエネルギー関数」に従って変化する決定論的な項
- σdWt : 確率密度のランダムな揺らぎ

これは、意味の確率分布 Pt(w) が、エネルギー関数 E(w) によってトレンドを持ちながら、

ランダムな影響で変化していくモデルになっています。

例えば、

- **エネルギー関数 E(w)** が低い方向に確率が集中する
  → **意味が安定化する**（よく使われる意味に収束）
- **ランダムな項 σdWt** → **意味が不規則に変動する**（スラングや新語が登場）

◦ **直感的なイメージ**

この確率微分方程式のモデルが何を意味するのか、具体的な例を考えてみる。

(1) 既存の語の意味変化

例えば、「クール：cool」という単語はもともと「冷たい」という意味でしたが、20 世紀後半に「かっこいい」「素晴らしい」という意味に変化しました。この変化を考えると、

- **ドリフト項 μ(Xt)** : 社会のトレンドや文化の変化による、意味の方向性のシフト
- **拡散項 σ(Xt)dWt** : 新しい意味の獲得や、世代ごとの異なる使い方による変動

この場合、ドリフト項が「cool」の意味を「冷たい」から「かっこいい」にゆっくりと押し動かし、拡散項がその途中での揺らぎを生み出していると考えられます。

(2) 造語の誕生と消滅

新しく生まれたスラングや流行語も、確率分布の変化として捉えられます。

- 新しい単語が生まれると、確率分布 Pt(w) に新たなピークができる（意味が定着する）
- 使われなくなった単語は、エネルギー関数 E(w) によって高い位置に押しやられ、確率密度が減少する（意味が消滅する）
- 一方で、ランダムな変動によって、時々古い単語が復活することもある

このように、確率過程の視点から見ると、**語の意味変化はエネルギーの影響とランダムな変動のバランスで決まる** という構図になる。

3.3 接空間から知識推論空間への変換

3.3.1 推論空間のリーマン多様体としての定義

推論空間をリーマン多様体 (M,g) と定義するとは、推論が行われる空間に幾何学的な構造を導入し、その上で曲率や距離を考慮しながら推論の流れを解析するということです。

- M は推論空間、すなわち意味の変化が発生する空間。
- g はリーマン計量で、局所的な距離や角度を決める。

3.3.2 測地線方程式の意味

$$\frac{d^2\theta^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{d\theta^j}{dt}\frac{d\theta^k}{dt} = 0$$

この方程式は、リーマン多様体上で測地線（最短または極値経路）を決定する基本的な式です。

推論空間において、この式が意味するのは「ある意味から別の意味へと推論が進む際に、最も自然な変化の仕方を記述する」ことです。

3.3.3 各項の意味

- θ^iは推論空間の座標（例えば、意味的な座標や概念的な変数）
- t はパラメータ（推論の進行を表す時間やステップ）
- $\frac{d^2\theta^i}{dt^2}$ は加速度成分で、意味変化の「慣性」を表す

- Γ^i_{jk} はクリストッフェル記号で、座標系に依存した曲率の影響を示す
- $\frac{d\theta^j}{dt}\frac{d\theta^k}{dt}$ は推論の進行による速度項

この方程式が成り立つということは、「推論の流れが曲がっているとき、その変化は空間の曲率(Γ^i_{jk})に従う」ということを意味します。

3.3.4 推論における解釈

この方程式が示唆するのは、推論のプロセスが「自然な流れ」に従って進むことです。

たとえば：

- 曲率がゼロの空間では、意味の変化は直線的（ユークリッド的）になる
- 曲率がある場合、推論はその影響を受けて曲がる
- ある概念から別の概念へとスムーズに推移するためには、測地線に沿った変化が最も合理的である

3.3.5 応用と意義

- **意味論的変化のモデル化**
  → 意味の変化を幾何学的な曲線として記述できる。
- **推論の最適経路の探索**
  → ある初期状態から最も自然に結論へ到達する経路を測地線として求められる。
- **知識空間の構造の理解**
  → 知識の推論がどのような空間的制約を受けるかを解析できる。

□測地線方程式を推論空間に適用することで、意味の変化や推論の流れをリーマン多様体の幾何学的な構造として捉えられます。このモデルを発展させることで、より自然で効率的な推論システムの設計や、知識の数学的な理論化が可能になると考えられます。

---

4. トポロジーによる知識圧縮と推論の最適化

知識を数学的に表現するために、概念間の関係をトポロジーの枠組みで記述します。

4.1 知識空間のトポロジー的定式化

知識空間 X を位相空間と見なし、各概念を点、概念間の関係を連結構造としてモデル化する。

- **概念（Concepts）**：知識空間の点 $x \in X$　　　（例：「猫」「犬」「哺乳類」）。
- **関係（Relations）**：概念間の連結構造　　　（例：「猫 ⊂ 哺乳類」）。
- **連結成分（Connected Components）**：上位概念からの同位概念の集合
  （例：「犬」と「猫」は哺乳類として結びつく）。
- **閉包（Closure）**：知識が補完される過程
  （例：「犬」と「猫」から「四足歩行」などの新たな知識を得る）。

位相空間 X のトポロジー的性質を解析することで、知識の構造を明らかにします。

4.2 ホモロジー群を用いた圧縮

シンプレクシャル複体によって構成される概念ネットワークを、ホモロジー群 $H_n(X)$ の計算により、冗長な関係を削減し、主要な概念間の基本関係のみを保持することができる。

ホモロジー群を用いて、概念の階層的関係を単純化し、知識の圧縮を実現します。

(1) 知識空間を単体複体として表現

概念間の関係を **単体複体**（simplicial complex）として構築：

- 0 次 Simplex（点）: 単一の概念（例：「猫」「犬」「哺乳類」)。
  - $K_0 =$ {犬、猫、哺乳類}　➡頂点 Vertex
- 1 次 Simplex（線）: 2 つの概念の関係（例：「犬」→「哺乳類」)。
  - $K_1 =$ {(犬,哺乳類）,（猫,哺乳類）,（犬,猫)}　➡辺 Edge
- 2 次 Simplex（三角形）: 3 つ以上の概念の相互関係（例：「猫」「犬」「哺乳類」の包含関係)。
  - $K_2 =$ {(犬,猫,哺乳類)}　➡平面 Plane
- 高次 Simplex: より抽象的な概念の関係。包含関係や諸関係
  - $K_n =$ {(犬,猫,哺乳類,⋯)}　➡超立体 SimplicialComplex

このような単体複体の構造を解析することで、冗長な関係を削減し、知識を圧縮することが可能になります。

(2) ホモロジー群の計算

単体複体 X のホモロジー群 $H_n(X)$ を求めることで、概念間の非冗長な関係を抽出：

$$H_n(X) = Ker\partial_n / Im\partial_{n+1}$$

・境界写像$\partial_n: C_n(K) \to C_{n-1}(K)$は、 n 次単体をその境界に写像する作用素

・ n 次ホモロジー群$H_n(X)$は、 n 次単体の中で境界を持たないが、より高次の単体の境界として表現できないものの集合（ n 次単体の本質的構造）

・ここで、**境界写像** ∂_n は次元 n の関係から次元 n-1 の関係を導く演算。

○単体複体 K に対して、チェーン群$C_n(K) = \{\sum_i a_i \sigma_i | \sigma_i \in K_2, a_i \in \mathbb{Z}\}$

境界写像$\partial_n: C_n(K) \to C_{n-1}(K)$は、各単体の境界（辺や頂点の集合）を抽出する写像だ

□一般に、 n 次元単体$[v_0, v_1, \cdots, v_n]$に対しては、

$$\partial_n [v_0, v_1, \cdots, v_n] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [v_0, \cdots, \hat{v_i}, \cdots, v_n]$$

と定義される。($\hat{v_i}$はv_iを除くことを意味する)

例：

∂(犬,猫,哺乳類)＝(猫,哺乳類)―(犬,哺乳類)＋(犬,猫)

∂ ・ ∂(犬,猫,哺乳類)＝∂((猫,哺乳類)―(犬,哺乳類)＋(犬,猫))

＝((哺乳類)―(猫))―((哺乳類)―(犬))＋((猫)―(犬))

＝ 0

(3)ホモロジーによる圧縮の考え方

- **冗長な関係を削除**：閉じたループ（例えば「犬」「猫」「哺乳類」の三角形）は 1 つの関係に縮約できる。
- **主要な構造のみを保持**：重要な概念間の基本的な関係だけを残す。

例えば、以下のような概念ネットワークを考える：

```
   哺乳類
   /  ＼
犬 ―― 猫
```

この場合、三角形の中の「犬 → 哺乳類」と「猫 → 哺乳類」の 2 つの関係は、ホモロジー群の視点か

ら見れば1つの関係に圧縮できる。すなわち、上位概念を定義することである。

$K' =$ {哺乳類,（犬,猫)}　という知識グラフで圧縮される

それには、関係を相関関係と有向関係に区別して、交絡関係を定義することである。

結果：知識ネットワークの不要な冗長性を削減し、効率的な推論を実現。

4.3 ホモトピー理論による知識の普遍性

ホモトピー変形を用いることで、連続的な変形が可能な概念同士を統合し、グローバルな知識構造の最適化を図る。これにより、推論アルゴリズムの計算コスト削減が期待される。

ホモロジーが **「局所的な構造の圧縮」** であるのに対し、ホモトピーは **「グローバルな知識の変形」** を記述します。

(1) 知識の同値性をホモトピーで定義

2つの概念 A,B がホモトピック(homotopic)である（同じ知識の表現と見なせる）とは、

ある連続変形

$F: A \times [0,1] \to B$　　$F: K \times [0,1] \to K'$

が存在することを意味する。　$F(x,0) = f(x),\ F(x,1) = g(x)$が成り立ち、$f \cong g$で表される。

これは、ある知識の表現が異なる形で記述されても、本質的には同じものであることを示す。

例えば、

- 「犬」と「オオカミ」はある程度の連続変形で同じ概念に収束可能。
  - すなわち、ホモトピー的に変形可能 → 同じ概念とみなせる
- 「リンゴ」と「バナナ」は異なるトポロジーを持つため変形不可能。
  - 「犬」と「猫」も変形できない → 別の概念とみなす

(2) 知識の圧縮と推論の最適化

ホモトピー理論を用いることで、知識推論の冗長性をさらに削減可能：

- **ファイバー束（Fiber Bundle）** を用いた知識の分類：
  - 基本層（Base space)：基礎知識
  - ファイバー（Fiber)：派生知識
  - セクション（Section)：推論の適用範囲
    - 知識空間Mをファイバー束としてみる
    - 基底空間Bは、「根本概念」をファイバーFはその派生概念の集合と表し、全体の知識空間を　$\pi: M \to B$　という射影写像πで表現する
- **ホモトピー同値な概念の統合**：
  - 「猫」↔「ネコ科動物」はホモトピー的に同値 → 1つの概念として圧縮
  - 「犬」↔「オオカミ」もホモトピー的に同値 → 圧縮可能
    - $f_{犬} \cong f_{狼}$　ホモトピー変形（連続変形）で同値とする
  - 「犬」↔「ネコ科動物」は変形できない → 別カテゴリに分類

$K' = K/\sim$　と定義する

これにより、知識のネットワークが最適化され、推論の計算コストを削減できる。

5. 不変性に関する考察

本研究における**不変性**とは、知識の数学的表現が特定の変換 T や条件下においても、その本質的な性質を維持する性質を指す。これにより、知識推論や意味解析の精度向上、および表現の効率化が可能となる。以下では、不変性の概念を数式とともに詳細に説明する。

5.1. 対称性の抽出

知識表現が持つ構造的な対称性を明示し、不変性を保証するために、**群論やガロア拡大の手法**を導入する。これにより、知識表現における冗長性を削減し、表現の圧縮を可能にする。

定義：対称性と変換群

知識表現をベクトル空間 V 内の点 $x \in V$ とし、変換群 G による作用が次のように
定義されるとする：

$$T_g : V \to V, \quad x \mapsto T_g(x)$$

ここで、Tg は群 G の元 g に対応する線形変換とする。

対称性の保存

知識表現がある変換 T に対して不変であるとは、次が成り立つことを意味する：

$$\forall g \in G, \quad T_g(x) = x$$

これは、知識の構造が変換 T のもとで変わらないことを示しており、情報の圧縮や推論の安定性に寄与する。

例：ガロア拡大による不変性

知識表現を体 K 上の拡大体 L の元とみなし、Gal(L/K) の作用を考える。拡大 L/K において、ガロア群 Gal(L/K) の元 σ による作用が

$$\sigma(x) = x$$

を満たすとき、x は不変である。これにより、**知識の本質的な構造を保ちながら、冗長な情報を取り除くことが可能**となる。

5.2. 推論の安定性の向上

不変性を考慮することで、ノイズや外乱に強い知識推論モデルを構築できる。

定義：知識推論の安定性

知識を確率分布 P(x) とし、その推論結果を関数 f によって表す：

$$y = f(x)$$

このとき、摂動 ϵ が加わった場合の変化が小さいことが安定性の指標となる。すなわち、

$$|f(x+\epsilon) - f(x)| \leq C \parallel \epsilon \parallel$$

が成立するならば、知識推論は摂動に対して安定であるといえる。

ノイズ不変性

知識空間を確率測度 μ で定式化し、摂動 δ を確率分布 Q による変化と考えた場合、

$$D_{KL}(P \parallel Q) \leq \epsilon$$

を満たすとき、知識の本質的な性質は維持される。ここで D_{KL} は Kullback-Leibler ダイバージェンスであり、分布の変化が小さいことを意味する。

この性質により、外部環境の影響を受けにくい堅牢な知識推論が実現可能となる。

□空間対称操作 G

・対称なので、G・G^{-1}＝E

・H'＝GH G^{-1}　　　　　不変ならば、可換である　　　　　＜共役性＞

・HG=GH　　　　　　可換 Commutable

・一つの固有値に二つ以上の固有関数が属していることを縮重 Degeneracy と云う

・量子もつれ Entangle に繋がる（「LLM が Hallucination を起こす確率」論文参照）

5.3. 応用への展望

不変性を持つ知識表現は、現実のシステムにおいて信頼性の高い推論を実現する基盤となる。特に、以下のような応用が考えられる。

1. **意味解析の強化：**
   - 意味論的に等価な表現を同一視することで、言語理解を向上させる。
   - 例：異なる表現「犬が走る」「走る犬」→ 同一の概念クラスに帰着。
2. **動的環境下での適応性：**
   - 知識の変化に対して、構造の一貫性を保つ。
   - 例：時系列データに対する適応的知識表現。
3. **信頼性の高い知識推論モデルの構築：**
   - AI システムにおける頑健性の向上。
   - 例：医療診断モデルの安定性強化。

□本研究では、不変性が知識表現において重要な役割を果たすことを示した。群論やガロア拡大を用いることで対称性を抽出し、摂動に強い推論モデルを設計することが可能となる。この理論を基に、より高度な知識推論システムの構築が期待される。

---

6. 応用例と展望

6.1 自然言語処理および機械学習への応用

本理論に基づく知識推論の枠組みは、知識グラフの圧縮や次元削減を通じた計算効率の向上、また現行 LLM の推論能力拡張に寄与する可能性がある。

ホモロジー・ホモトピーを活用した知識圧縮

- **ホモロジー**：局所的な冗長関係を削減し、知識の圧縮を実現。
- **ホモトピー**：グローバルな知識構造を簡素化し、推論の最適化。
- **自然言語処理（NLP）**：知識グラフの圧縮、推論アルゴリズムの効率化

6.2 今後の展開

今後は、具体的な数学的モデル（例：確率過程、情報幾何、トポロジー）を詳細に設計・実装し、実際のデータセットに対する実験評価を通して、本理論の有効性を検証する予定である。また、応用先として、生成 AI/LRM におけるより人間に近い推論機構の実現にも寄与することが期待される。

---

7. 結論

本論文では、言語空間における単語ベクトル表現を確率分布として再解釈し、情報幾何やトポロジーを用いた知識推論の新たな枠組みを提案した。提案手法は、知識の冗長性を削減し、推論の精度と計算効率の向上を目指すものであり、今後の生成 AI および LRM への応用や改良が期待される。

参考文献

意味位相空間理論(吹谷)、双曲知識構造化技術（吹谷)、LLM が Hallucination を起こす確率（吹谷)、Learning Continuous Hierarchies in the Lorentz Model of Hyperbolic Geometry（ Maximilian Nickel1, Douwe Kiela)、Low Distortion Delaunay Embedding of Trees in Hyperbolic Plane（ Rik Sarkar)、Low-Dimensional Hyperbolic Knowledge Graph Embeddings（ Ines Chami1 , Adva Wolf1, Da-Cheng Juan2, Frederic Sala1, Sujith Ravi3 and Christopher)、NeuralEmbeddingsofGraphsinHyperbolicSpace(BenjaminPaulChamberlain, JamesRClough,Marc…)、POINCARE GLOVE:HYPERBOLIC WORD EMBEDDINGS（ Alexandru T, ifrea, Gary B ecigneul , Octavian-Eugen Gane)、Representation Tradeoffs for Hyperbolic Embeddings（ Christopher De Sa Albert Gu Christopher)、Unsupervised Hierarchy Matching with Optimal Transport over Hyperbolic Space（David Alvarez-Melis, Youssef Mroueh, Tommi Jaakkola)

要旨 (Abstract)

- **新たな枠組みの提案**
  LLM／LRM で用いられている知識ベクトル表現を、SLM 言語空間上の統計的確率分布として再解釈する。
- **手法の概要**
  単語の埋め込みをボルツマン分布やカノニカル分布で表現し、KL ダイバージェンス、情報エントロピー、測地線などで意味距離を評価する。
- **数学的解析**
  リーマン幾何学（情報幾何）を用いて分布の変化を接空間上で記述し、推論過程を確率微分方程式やトポロジー（ホモロジー、ホモトピー）でモデル化する。
- **不変性の抽出**
  群論やガロア拡大によって、変換下でも本質的性質が保たれる不変性を抽出し、知識の根本構造を解析する。

---

1. はじめに (Introduction)

- **背景と動機**
  生成 AI や LLM の実用化に伴い、知識表現および推論手法への関心が高まっている。
- **従来手法の限界**
  従来の知識ベクトルは言語空間で意味情報を捉えるが、背後にある確率論的・幾何学的構造の解明が不十分である。
- **本研究の目的**
  言語空間を統計確率分布空間、さらに接空間や推論空間へ変換することで、知識推論の数学的厳密化を図る。

---

2. 理論的背景 (Theoretical Background)

- 2.1 言語空間と Token ベクトル
  - トークンを n 次元の埋め込みベクトルとして表現し、Affine 変換により知識が生成される。
  - 従来は距離や角度で意味的類似性を評価していたが、実際の多次元意味概念空間は曲がっており、再解釈が必要。
- 2.2 統計確率分布と情報理論
  - LLM の単語ベクトルは高次元行列として表され、Transformer/Attention 機構で処理される。
  - ユークリッド的な内積・角度評価ではなく、曲率や測地線を利用して意味距離を定量的に評価するため、KL ダイバージェンスやエントロピーを導入。
  - 統計的性質（中心極限定理、大数の法則）を活用可能。
- 2.3 情報幾何と接空間
  - 確率分布空間をリーマン多様体とみなし、フィッシャー情報計量で各分布間の測地線（最短経路）を定義する。
  - これにより、単語の意味変化を接空間上の曲率として捉える。
- 2.4 確率分布による知識の再解釈
  - 単語ベクトルの集合を単なる点の集まりではなく、統計的分布として解釈することで、意味変化の滑らかさや情報ロスの定量評価が可能になる。

---

3. 提案する変換理論 (Proposed Transformation Theory)

- 3.1 言語空間から統計確率分布空間への変換
  - 各単語を n 次元ベクトルで表現し、その発生確率に基づいてボルツマン分布などの確率分布へ変換。
  - KL ダイバージェンスを用いて単語間の意味距離を測定（非可換性のため類似度として解釈)。
- 3.2 統計確率分布空間から接空間への変換
  - リーマン幾何学を用い、フィッシャー情報行列により測地線を定義。
  - 新たな提案として、曲率（外積のノルムで近似）を考慮した「測地線＝ユークリッド距離×曲率」により疎な部分空間でも正確な距離計算を実現。
  - 確率微分方程式で意味変化（ドリフト項と拡散項）をモデル化し、実例として「クール」の意味変化などを説明。
- 3.3 接空間から知識推論空間への変換
  - 推論空間をリーマン多様体として定義し、局所的な距離や角度をリーマン計量で決定。
  - 測地線方程式を適用することで、概念間の自然な推論の流れ（最適経路）を記述。
  - 各項（加速度、クリストッフェル記号、速度項）が意味変化の慣性や空間の曲率を反映。

---

4. トポロジーによる知識圧縮と推論の最適化 (Topology-Based Knowledge Compression and Inference Optimization)

- 4.1 知識空間のトポロジー的定式化
  - 知識空間を位相空間と捉え、各概念を点、関係性を連結構造（エッジ、連結成分、閉包）としてモデル化。
- 4.2 ホモロジー群を用いた圧縮
  - 単体複体を構築し、ホモロジー群の計算により冗長な関係を削減。
  - 例として、三角形（犬、猫、哺乳類）の冗長な関係を 1 つの基本的な関係に圧縮する手法を提示。
- 4.3 ホモトピー理論による知識の普遍性
  - ホモトピー変形を用いて、連続的な概念の変形・統合を行い、グローバルな知識構造を最適化。
  - これにより、推論アルゴリズムの計算コスト削減が期待される。

---

5. 不変性に関する考察 (Discussion on Invariance)

- 5.1 対称性の抽出
  - 群論やガロア拡大を用い、知識表現の構造的対称性を抽出し、冗長性を削減する。
  - 知識表現が特定の変換下で不変である条件を定義。
- 5.2 推論の安定性の向上
  - 不変性により、外部の摂動やノイズに対して頑健な推論モデルの構築が可能になる。
- 5.3 応用への展望
  - 意味解析の強化、動的環境への適応、医療診断など、信頼性の高い知識推論システムの実現に寄与する。

---

6. 応用例と展望 (Applications and Future Prospects)

- 6.1 自然言語処理および機械学習への応用
  - 知識グラフの圧縮や次元削減を通じた計算効率の向上、LLM の推論能力拡張への貢献。
  - ホモロジー・ホモトピーを活用して、冗長性を削減し最適な推論経路を探索。
- 6.2 今後の展開
  - 数学的モデル（確率過程、情報幾何、トポロジー）の詳細設計と実装、実際のデータセットに対する実験評価を計画。
  - 生成 AI／LRM において、より人間らしい推論機構の実現を目指す。

---

7. 結論 (Conclusion)

- 本研究は、言語空間上の単語ベクトルを統計的確率分布として再解釈し、情報幾何やトポロジーを用いた知識推論の新たな枠組みを提案している。
- 提案手法は、知識の冗長性を削減し、推論精度および計算効率の向上を実現することを目的としている。

- 今後の応用やさらなる改良により、生成 AI や LLM の推論能力の向上が期待される。
